- inscrivez-vous au test intermédiaire
- exercices supplém. à rendre sur Moodle

Cours 8.1

5.11.24

Rappel dans $\mathbb{R}^n$

Def. 4.5.3 : Soit $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ $b_i \in \mathbb{R}^n$ base ordonnée de $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ base canonique (ordonnée)

Soit $P_B = \left(\vec{b}_1 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \vec{b}_n\right)_{n \times n}$

= la matrice de changement de coordonnées de B à $\mathcal{E}$ = la base canonique de $\mathbb{R}^n$

qui a la propriété : $\forall x \in \mathbb{R}^n$

on a $\boxed{x = P_B \cdot [x]_B}$ ← Formule de changement de base de B à $\mathcal{E}$

x écrit dans la base canonique

x écrit dans la base B

et $\boxed{P_B^{-1} \, x = [x]_B}$

Formule de chang. de base de $\mathcal{E}$ vers B

Exemple 4.5.5 (suite de 4.5.2)

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

b_1 b_2 b_3 ← écrits dans la base canonique.

base ordonnée de $\mathbb{R}^3$

Prenons $x \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$[x]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}_B = 4b_1 + (-3)b_2 + 2b_3$$

(↑ def.)

d'après ♥

$$x = P_B \cdot [x]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$P_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

x ↑ dans $\mathcal{E}$

$$= \begin{pmatrix} 4-3+2 \\ -3+2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

↑ dans la base canonique

Grâce à ♠ on a

$$[x]_B = P_B^{-1} \cdot x$$

calculs : $P_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

on a alors

$$[x]_B = P_B^{-1} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

calcul

coordonnées de x dans la base B

Ex 4.5.6 : Dans $\mathbb{R}^2$

prenons $\theta \in \mathbb{R}$

$\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ ← base canonique

$$b_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$B = (b_1, b_2)$ est une base (ord.) de $\mathbb{R}^2$

$$P_B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ ♠ matrice de passage ou de changement de base de B à $\mathcal{E}$

donc on a $\forall x \in \mathbb{R}^2$ on a

$$x = P_B \cdot [x]_B$$ ♡

et $[x]_B = P_B^{-1} \cdot x$ ♤

or $P_{\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

↑ fais-le

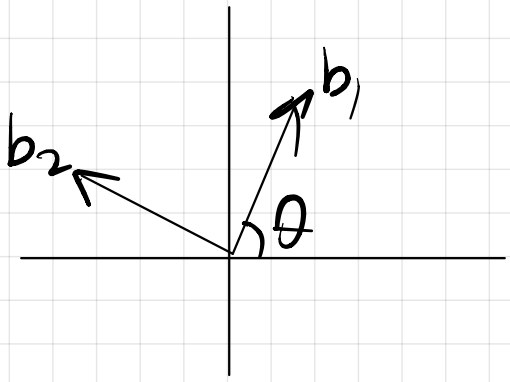
Donc, $\forall\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ (dans $\mathcal{E}$)

on trouve ses coord. dans $\mathcal{B}$ avec ⚠

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1\cos\theta + x_2\sin\theta \\ x_2\cos\theta - x_1\sin\theta \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$\cdot\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$ ↗



Fin 4, S.6

Def 4.5.7 : On dira que V (un esp. vect.) est de dimension finie si V possède une base finie $\{b_1, \dots, b_n\}$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Si c'est pas le cas on dit que V est de dimension infinie et on écrit $\dim(V) = \infty$

Bon théorème 4.5.8

Soit V un espace vectoriel, $V \neq \{0\}$

0) alors V possède une base (possiblement infinie)

1) Si V est de dimension finie

disons avec base (ord) finie $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$

avec n vecteurs $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

et si $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\}$ avec $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Supposons que $p > n$, alors

$\mathcal{F}$ est linéairement dépendante (ou liée)

1') Si V possède une base ayant n vecteurs alors toute autre base de V a aussi n vecteurs.
(ceci découle de 1))

(Conséquence : toutes les bases ont le même nombre d'éléments.)

Def 4.5.9 : Soit V de dim. finie.
On écrit $\dim(V) = n$ si V possède une base ayant n éléments.
On l'appelle la dimension de V

2) (Bon Thm 4.5.8 suite)
Soit $W \subseteq V$ un S.E.V de V de dim quelconque
et $W \neq \{0_V\}$.

Supposons que $W = \text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$
(càd les v_i engendrent W)

Alors, il existe une sous-famille de $\{v_1, \dots, v_p\}$ qui est une base de W

(+ précisément. $\exists$ r vecteurs lin. indép. dans $\{v_1, \dots, v_p\}$ avec $r \leq p$ t.q $W = \text{Vect}\{v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\}$)

En français : de toute partie génératrice de W on peut extraire une base.

en part. $\dim(W) = r \leq p$.

3) Soit $W \subseteq V$ s.E.V de V

et supp. $\dim(V) = n$ $\quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Alors toute famille (finie) lin. indépendante de W peut être complétée en une base de W

Plus précis : si $\mathcal{F} = \{w_1, \dots, w_r\}$ lin indép. avec $w_i \in W$, alors il existe s vecteurs

$w_{r+1}, w_{r+2}, \dots, w_{r+s} \in W \quad s \in \mathbb{N}$

tels que $\{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_{r+s}\}$ est une base de W,

En français : on peut compléter toute famille lin. indép. en une base.

en particulier $\dim(W) = r+s \leq n = \dim(V)$

$\dim(W) \leq \dim(V)$.

4) Soit V t.q $\dim(V) = n$ $n \geq 1$.

i) si $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\}$ lin. indép.
et que $p = n$, alors $\mathcal{F}$ est une base de V.

ii) si $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\}$ engendre V
et que $p = n$, alors $\mathcal{F}$ est une base de V

Donc, morale de 4, une base de V (de dim finie)

- est une famille (finie) linéairement indép. maximale pour le nombre d'élém. n

- est une famille (finie) génératrice minimale pour le nombre d'élém n.

4,5) V esp. vectoriel
- L partie lin. indép
- G partie génératrice

alors $\#L \leq \#G$ ($\#X$ = le nombre d'élém dans X)

5) Bon Thm 4.5.8 (suite)

Soit $T : V \to W$ une transfo. lin. et soit

$\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\}$ famille finie de V avec $p \in \mathbb{N} - \{0\}$

5.1) Supposons que T soit injective ($\Leftrightarrow \ker(T) = \{0_V\}$) alors

si $\mathcal{F}$ est lin. indépendante dans V, alors

$T(\mathcal{F}) \overset{\text{déf}}{:=} \{T(v_1), \dots, T(v_p)\}$

est aussi lin. indépendante dans W

5.2) Supp. que T soit surjective ($\Leftrightarrow \mathrm{Im}(T) = W$)

si $\mathcal{F}$ engendre V, alors

$T(\mathcal{F})$ engendre W

(càd si $V = \mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$ et T surjective

alors $W = \mathrm{Vect}\{T(v_1), \dots, T(v_p)\}$)

5.3) supp T bijective, alors

$\mathcal{F}$ est une base de V

$\Leftrightarrow$ $T(\mathcal{F})$ est une base de W.

reformulation en termes de dim.

5.1') T injective $\Rightarrow$ $\dim(V) \leq \dim(W)$

5.2') T surjective $\Rightarrow$ $\dim(V) \geq \dim(W)$

5.3) T bijective $\Rightarrow$ $\dim(V) = \dim(W)$

6) Supposons que $\mathcal{F}$ soit une base de V

$\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\}$ (et donc $\dim V = p$)

alors $T : V \to W$ transfo. linéaire

est entièrement déterminée par les

p vecteurs $T(v_1), \dots, T(v_p) \in W$

en effet, comme $\mathcal{F}$ est une base de V, $\forall v \in V$

il existe un unique p-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^n$

t.q $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p$

↓ T.L.

$T(v) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \dots + \lambda_p T(v_p)$.

↘ appliquons T

Donc T est déterminée par les images des vecteurs d'une base de V.

Fin Bon Thm 4.5.8

Ex 4.5.9

0) Si $V = \{0\}$, alors il n'y a pas de base de V

donc $\dim V = 0$

1) $V = \mathbb{R}^n$ = esp de coord.

$\dim(\mathbb{R}^n) = n$

car $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ = base canonique

↖ n vecteurs

2) $P_n = \{p(t) \in \mathbb{P} \mid \deg(p) \leq n\}$ $n \in \mathbb{N}$.

on a $\dim(\mathbb{P}_n) = n+1$.

car $\mathcal{F} = \{\underbrace{1}_{=t^0}, t, t^2, \dots, t^n\}$ est une base de $\mathbb{P}_n$

et il y a $n+1$ polynômes dans $\mathcal{F}$.

3) Si $V = \mathcal{F}(X; \mathbb{R})$ X un ensemble.

si X est fini, alors

$\mathcal{D} = \{\delta_x \mid x \in X\}$ est une base de V

où $\delta_x : X \to \mathbb{R}$

$$y \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } y = x \\ 0 & \text{si } y \neq x \end{cases}$$

en particulier $\dim(\mathcal{F}(X; \mathbb{R})) = \#X$

↑ le nombre d'élém. dans X

4) $V = M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$\dim(M_{m \times n}(\mathbb{R})) = m \cdot n$

ex: $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ base

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

4) $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ $\quad V=\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$\dim(V)=n^2$

Soit $D\subset\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ le S.E.V des matrices diagonales.

base de D : $\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\ddots&\\0&&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&\\0&&\ddots\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0&0&\\0&\ddots&\\&&1\end{pmatrix}\right\}$

n matrices

5) Il existe des espaces de dim infinie

ex: $V=\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ = l'espace des suites réelles

$\mathcal{D}=\{\delta_x \mid x\in\mathbb{N}\}$ ← famille lin indépend.

← n'engendre pas $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$

donc $\dim V\geq \#\mathcal{D}=+\infty$

p.ex $id_{\mathbb{N}}:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $n\mapsto n$

$\notin Vect\{\delta_x \mid x\in\mathbb{N}\}$

0) dit que tout esp. vect. possède une base
donc V aussi, mais il n'y a personne
dans l'univers qui connaisse une base
de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

§4.6 Bases de Ker(A) et Im(A) :

(pour $A \in \Pi_{m\times n}(\mathbb{R})$)

Recettes 4.6.1 : Ker(A).

1) Echelonner et réduire A $\quad A_{m\times n} \rightsquigarrow R_{m\times n}$

alors $\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} = \mathrm{Ker}(R)$

2) trouver les variables libres (celles sans pivot)

Donc, si on a (r) pivots

on aura donc (n−r) variables libres

3) écrire les variables liées en fonctions des variables libres

4) Écrire la sol. générale du système (homogène)

$Ax = 0$ (ou plutôt $Rx = 0$)

comme comb. lin. de vecteurs fixes

où les coefficients sont les variables libres

On aura ainsi $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - r$

= nombre de variables libres.

Recette 4.6.2 : $\mathrm{Im}(A)$. (plus subtil)

comme 4.6.1. puis remonter à A :

Thm : les colonnes-pivots de A

forment une base de $\mathrm{Im}(A)$

(et non pas les colonnes-pivots de R)

donc $\dim(\mathrm{Im}(A)) = \#\text{pivots} = r$

(on a l'égalité $\underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(A))}_{n-r} + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(A))}_{r} = n$)

Exemple 4.6.3 :

$$A = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 4\times 5$$

$\textcircled{a_1}\ a_2\ \textcircled{a_3}\ a_4\ \textcircled{a_5}$

échel. réduite

alors les colonnes-pivots forment une base de $Im(A)$ = $Col(A)$

$$Im(A) = Vect\{a_1, a_3, a_5\}$$

et a_1, a_3, a_5 sont lin. indép

Si la matrice n'est pas réduite

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 12 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 20 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$B \rightsquigarrow$ opérations exercice $\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$

a_1 ↑ a_3 ↑ a_5

3 colonnes pivots lin. indép

on revient à B et on regarde les col.

Correspondentes:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

formem uma base de $\mathrm{Im}(B)$.